TD 15 : Dérivation Indications

Taux d'accroissement et dérivée

1 ★ On pose $f : x \mapsto |x|^{3/2}$.

1) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en 0, et calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.
2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si c'est le cas, préciser $f'(0)$.
3) Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f : x \mapsto |x|^{1/2}$.
4) Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor \times |x|$.

2 ★☆ Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$
3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$
4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\sin x}{x^2}$
5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(3+x) - \ln 3}{\ln(2+x) - \ln 2}$
6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$

3 ★★ Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\cos x - 1}$$

Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0. En déduire que f n'admet pas de limite en 0.

4 ★★★ Étudier la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est discontinue en tout point $a \neq 0$. Elle ne sera donc pas dérivable en a. Il reste la dérivabilité en 0.

Les grands théorèmes de la dérivation

5 ★★ Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.
Remarquer que $(f - g)(a) = 0$ et $(f - g)(b) = 0$.

6 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui s'annule en n points (distincts). Montrer que f' s'annule en au moins $n - 1$ points.
Un théorème permet de conclure que si f s'annule en certains points, f' s'annule sur d'autres...

7 ★★ En utilisant l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{101} \approx 10 \qquad \frac{1}{0{,}99^2} \approx 1 \qquad \cos 1 \approx \frac{1}{2}$$

Par exemple, pour la première approximation, il faut majorer $|\sqrt{101} - 10|$.
Pour la première majoration, remarquer qu'il s'agit de $|f(101) - f(100)|$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

8 ★★ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Soit enfin $a, b \in I$ tels que $a < b$. Pour tout $x \in I$, on pose

$$g(x) = \frac{f(a) + f(x)}{2} - \left(f\left(\frac{a + x}{2}\right) + (x - a)^2 A \right)$$

avec A une constante réelle.

1) Déterminer une valeur A telle que $g(a) = g(b) = 0$. Cette valeur de A sera fixée comme tel dans la suite.
2) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
3) En appliquant l'égalité des accroissements finis à f' entre deux points bien choisis, en déduire qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{(b - a)^2}{8} f''(d)$$

1) Isoler A dans l'équation $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$, lorsque c'est nécessaire.

2) Immédiat mais soyez consciencieux malgré tout.
3) En utilisant le fait que $g(b) = 0$, que doit valoir A pour que cela fonctionne ? Puis utiliser la question 2.

9 ★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et admettant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. En considérant la fonction $g = f \circ \tan$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
Prolonger la fonction g par continuité en $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

10 ★★ En appliquant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right]$$

On est face à une expression de la forme $f(x+1) - f(x)$ avec $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

Dérivabilité revisitée

11 ★ On pose

$$f : x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$$

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement. Préciser la valeur de $f(0)$.
2) Montrer que la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$. Est-ce que f est de classe $\mathscr{C}^1$?
4) Est-ce une contradiction avec le théorème de la limite de la dérivée ?

Repartir de la définition avec le taux d'accroissement.

12 ★☆ Soit f la fonction définie sur $\left[-1,1\right]$ par $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$.
1) Montrer que f est dérivable sur $\left]-1,1\right[\setminus\{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[\setminus\{0\}$.
2) Étudier la dérivabilité de f en -1, en 1 puis en 0.

Étudier d'abord la dérivabilité sur $\left]-1,1\right[$, puis en 1 et en -1 qui sont des points “potentiellement problématiques”.

13 ★★ Prolonger les fonctions suivantes par continuité en 0. Puis étudier leur dérivabilité en 0.

$$f(x) = x\ln|x| \qquad h(x) = e^{-1/x^2}$$
$$g(x) = x^x \qquad \varphi(x) = \frac{\sin|x|}{|x|}$$

On peut utiliser le théorème de la limite de la dérivée, ou bien la dérivabilité à gauche / à droite. Cette dernière méthode est parfois plus rapide lorsqu'on veut montrer qu'il n'y a pas dérivabilité en 0.

14 ★★ Soit $f : x \mapsto \operatorname{ch}\sqrt{x}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.
1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2) Est-ce que f est de classe $\mathscr{C}^2$?

1) C'est un taux d'accroissement.
2) Considérer d'abord $\mathbb{R}_+^*$ (qui est ouvert), puis traiter le cas 0 par un théorème.
3) Appliquer la même méthode qu'en 2.

Dérivées n-ièmes

15 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions définies par les expressions suivantes :

- $f_1(x) = (x^2+4x)e^{3x}$
- $f_2(x) = \dfrac{1}{1-2x}$
- $f_3(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$
- $f_4(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
- $f_5(x) = \sin^3 x$

Pour f_4 et f_5, on pourra d'abord réécrire ces expressions comme si on voulait les intégrer.
S'appuyer sur la méthode en dernière page du poly de cours.

16 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^{2n}$.
1) Calculer de deux façons la dérivée n-ième de f. On pourra utiliser le fait que $x^{2n} = x^n \times x^n$.
2) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

1) Une façon est de dériver n fois $x \mapsto x^{2n}$ directement. Une autre est d'appliquer la formule de Leibniz car $f = gh$ avec $g(x) = x^n$ et $h(x) = x^n$.

2) En égalisant les expressions trouvées en question 1, le résultat arrive rapidement.

17 ★★☆ Soit $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$.

1) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (sur $\mathbb{R}^*$).
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3) En déduire que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) C'est immédiat par la phrase magique.
2) Il faut procéder par récurrence. Il n'est pas nécessaire d'avoir une expression explicite de P_n.
3) C'est un prolongement en un "trou" : calculer la limite à gauche puis à droite.

18 ★★☆ Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa classe, c'est-à-dire la plus grande valeur de $k \in \mathbb{N}$ pour laquelle la fonction est de classe $\mathscr{C}^k$.

$$f(x) = x|x| \qquad g(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{avec } n \in \mathbb{N})$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Remarquer que chaque fonction est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit donc de regarder ce qui se passe en 0.

19 ★★★ Soit P une fonction polynômiale. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions. *Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 6.*Supposons par l'absurde qu'il y a une infinité de réels x qui vérifient $P(x) = e^x$. Donc la fonction $f : x \mapsto P(x) - e^x$ prend la valeur zéro en une infinité de points. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe (au moins) n points où f s'annule.